1795

De centro simulitudinis

Leonhard Euler

DE CENTRO SIMILITVDINIS.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 23 Octob. 1777.

§. 1.

Tab. III. Fig. 1. Si habeantur duae figurae similes in eodem plano descriptae, quarum maioris quodpiam latus sit A B, minoris vero latus respondens $a\,b$, semper dabitur in eodem plano certum punctum Γ, quod ad vtramque figuram similiter referatur, ita vt figurae Γ A B et Γ $a\,b$ sint inter se similes, hocque punctum Γ appelletur centrum similitudinis binarum figurarum similium propositarum, quod ergo quomodo quouis casu inueniri queat, hic inuestigemus. Primo igitur patet istud punctum Γ ita situm esse debere, vt ductis rectis Γ A et Γ a anguli Γ A B et Γ $a\,b$ sint inter se aequales; deinde vt sit $\Gamma A : \Gamma a = AB : ab$, hoc est in ratione laterum homologorum, quam rationem indicemus per $A : a$.

§. 2. Hic quidem statim patet, si latera homologa Fig. 2. A B et $a\,b$ fuerint inter se parallela, tum centrum similitudinis facillime assignari posse, cum semper reperiatur in intersectione rectarum A a et B b. Quodsi enim fuerit $a\,b$ paralſum lateri ipſi A B, productis rectis A a et B b vsque ad concurſum Γ, triangula A B Γ et a b Γ manifeſto ſunt inter ſe ſimilia. Pari modo ſe res habet, quando latera homologa in plagas contrarias porriguntur, veluti in figura 3., vbi centrum ſimilitudinis inter ambas figuras cadit. Tab. III. Fig. 3.

§. 3. Sin autem latera A B et a b non fuerint inter ſe parallela, producantur ea ad mutuum concurſum in O, facientes inter ſe angulum A O a, ac manifeſtum eſt bina quaevis alia latera homologa ſub pari angulo inuicem inclinari; Fig. 4. vnde ſequitur, ſi per puncta O, A, a, ducatur circulus O A a, tum omnia puncta O in peripheriam huius circuli incidere debere, quia omnes anguli arcui A a inſiſtentes ſunt inter ſe aequales.

§. 4. Deinde etiam perſpicuum eſt centrum ſimilitudinis Γ in eadem circuli peripheria reperiri debere. Cum enim rectae Γ A et Γ a tanquam latera homologa ſpectari queant, eae inter ſe quoque angulum A Γ a ipſi A O a aequalem conſtituent; quamobrem totum negotium huc redit, vt in peripheria id punctum Γ reperiatur, vt ductis rectis Γ A et Γ a fiat Γ A : Γ a = A : a. Hunc in finem ducta recta A a ita ſecetur in puncto Δ, vt ſit A Δ : a Δ = A : a; et quia requiritur vt ſit Γ A : Γ a = A Δ : a Δ, ſequitur rectam Γ Δ angulum A Γ a biſecare, ideoque eam productam etiam arcum A a eſſe biſecturam in ω.

§. 5. His perpenſis deducitur iſta conſtructio geometrica: Primo ſcilicet arcus A a biſecetur in puncto ω, chorda vero A a ita ſecetur in puncto Δ, vt ſit A Δ : a Δ = A : a, quo facto per puncta ω et Δ producatur recta ω Δ Γ, peripheriam circuli ſecans in puncto Γ, eritque iſtud punctum Γ centrum ſimilitudinis quaeſitum. Ex hac enim conſtructione ſponte patet eſſe $\Gamma A : \Gamma a = \Delta A : \Delta a = A : a$. Deinde quoque euidens eſt has rectas ΓA et Γa ad latera AB et ab aequaliter inclinari, propterea quod anguli $OA\Gamma$ et $Oa\Gamma$ ſunt inter ſe aequales, vtpote eidem arcui $O\Gamma$ inſiſtentes.

§. 6. Quemadmodum hic centrum ſimilitudinis Γ determinauimus ex punctis homologis A et a, eorum loco etiam vſurpari poſſent puncta homologa B et b, quae ad punctum concurſus O pariter referuntur. Hic ergo deſcribi oportuiſſet circulus OBb; et quoniam centrum Γ etiam in peripheria huius circuli reperiri debet, neceſſe eſt, vt hic circulus praecedentem in ipſo puncto Γ interſecet. Cum igitur hi duo circuli per idem punctum O tranſeant, eorum altera interſectio neceſſario cadet in punctum Γ, hoc eſt in centrum ſimilitudinis quaeſitum.

§. 7. Idem quoque centrum ſimilitudinis locum habebit, etiamſi ambae figurae propoſitae non fuerint planae, ſed ſuper eodem plano ſimiles habeant prominentias, dummodo baſes talium ſimilium corporum in eodem plano fuerint conſtitutae. Vnde intelligitur, ſi per bina quaeuis puncta homologa talium corporum et centrum ſimilitudinis producatur planum, ſecundum quod ambo corpora ſecentur, tum etiam ambas eorum ſectiones inter ſe ſimiles eſſe futuras. Hinc intelligere licet, quomodocunque duo corpora ſimilia fuerint poſita, ſemper quoque exhiberi poſſe centrum ſimilitudinis, quod ſcilicet ad ambo corpora ſimili modo referatur, id quod per ſequentem calculum oſtendi poteſt.

Tab. III. Fig. 5. §. 8. Sint A et a duo puncta homologa quaecunque duorum corporum ſimilium, per quae planum tabulae tranſire fire concipiatur; in quo plano maioris corporis concipiatur latus quoduis A B, cui respondens homologum in minori corpore $a\,b$ in alio quodam plano sit situm, quod planum tabulae intersecet secundum rectam $a\,i$, cuius inclinatio sit $= \theta$. Iam ex puncto b ad planum tabulae demittatur perpendiculum $b\,\beta$, tum vero ex β ad $a\,i$ ducatur normalis $\beta\,\mathfrak{b}$, iunctisque punctis $\mathfrak{b}$ et b recta $b\,\mathfrak{b}$, angulus $b\,\mathfrak{b}\,\beta$ metietur inclinationem plani $= \theta$; tum vero notetur esse $AB : a\,b = A : a = \lambda : 1$, existente $\lambda = \frac{A}{a}$. Iam in ipso plano tabulae statuatur angulus $BAI = b\,a\,i$, et ex B agatur ad A I normalis $B\mathfrak{B}$, eruntque puncta $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{b}$ quoque homologa, perinde ac B et b.

§. 9. Nunc vocemus pro maiori figura $A\mathfrak{B} = A$ et $\mathfrak{B}B = B$, pro minore vero figura $a\,\mathfrak{b} = a$ et $\mathfrak{b}\,b = b$, eritque ob similitudinem $A = \lambda a$ et $B = \lambda b$; tum vero in triangulo $b\,\mathfrak{b}\,\beta$ habebitur $b\,\beta = b \sin.\theta$ et $\mathfrak{b}\,\beta = b \cos.\theta$. His positis producantur rectae $i\,a$ et I A ad concursum vsque in O, et cum centrum similitudinis quaesitum Γ in sublimi reperiatur, ex eo ad planum tabulae demittatur perpendiculum ΓY, ex puncto Y vero ad vtramque rectam A O et $a\,O$ agantur normales Y X et $Y x$, ponanturque $AX = X$ et $XY = Y$, tum vero $a\,x = x$ et $x\,Y = y$, ipsum vero perpendiculum $Y\Gamma$ vocetur $= z$. His positis si vocentur interualla $AO = f$ et $a\,O = g$, angulus vero $A\,O\,a = \omega$, ob $O\,x = g - x$, facile patet fore:

$$AX = X = f - (g - x)\cos.\omega - y \sin.\omega \text{ et}$$

$$XY = Y = (g - x)\sin.\omega - y \cos.\omega,$$

vnde intelligitur quomodo litterae X et Y per x et y determinentur.

§. 10. Nunc igitur ostendi debet, dari eiusmodi punctum Γ, quod ad terna puncta A, B, $\mathfrak{B}$, simili modo referatur, atque ad puncta a, b, $\mathfrak{b}$, siue vt sit $\Gamma A = \lambda \Gamma a$; $\Gamma \mathfrak{B} = \lambda \Gamma \mathfrak{b}$ et $\Gamma B = \lambda \Gamma b$; vnde nanciscimur ternas aequationes, ex quibus ternas quoque incognitas x, y et z determinari oportebit; quae aequationes sequenti modo exprimentur:

$$\text{I. } \Gamma A^2 = X^2 + Y^2 + z^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\text{II. } \Gamma \mathfrak{B}^2 = (X + \lambda a)^2 + Y^2 + z^2 = \lambda^2 [(x + a)^2 + yy + zz],$$

$$\text{III. } \Gamma B^2 = (X + \lambda a)^2 + (Y - \lambda b)^2 + z^2 = \lambda^2 [(x + a)^2 + (y + b \cos. \theta)^2 + (z - b \sin. \theta)^2].$$

§. 11. Harum aequationum prima ergo dat

$$X^2 + Y^2 + z^2 = \lambda \lambda x x + \lambda \lambda y y + \lambda \lambda z z,$$

quae ab aequatione secunda subtracta relinquit

$$2 \lambda a X + \lambda \lambda a a = 2 \lambda \lambda a x + \lambda \lambda a a,$$

ideoque $X = \lambda x$. Tum vero secunda aequatio a tertia subtracta relinquit:

$$-2 \lambda b Y + \lambda \lambda b b = 2 \lambda \lambda b y \cos. \theta - 2 \lambda \lambda b z \sin. \theta + \lambda \lambda b b,$$

ex qua aequatione colligitur

$$Y = \lambda (z \sin. \theta - y \cos. \theta).$$

Hoc ergo modo tota inuestigatio reducta est ad tres aequationes ternas variabiles x, y et z inuoluentes, vnde ipsae litterae a et b excesserunt, quemadmodum rei natura postulat, propterea quod centrum similitudinis Γ aequali modo ad omnia latera homologa referri debet. Interim tamen istae tres aequationes nimis sunt complicatae (praecipue si loco

X

X et Y valores ſupra datos ſubſtituere vellemus) quam vt hinc litterae x, y et z actu determinari queant.

§. 12. Quin etiam iſtum calculum ideo in medium adduximus, vt oſtenderemus, quomodocunque bina corpora ſimilia fuerint diſpoſita, ſemper dari eiusmodi punctum Γ, quod ad ambo aequaliter referatur. Hoc autem demonſtrato aliam methodum inire conuenit, ipſum ſimilitudinis centrum determinandi, inde petendam, quod omnes binorum corporum ſectiones, per bina puncta homologa et centrum ſimilitudinis factae, ſemper ſint figurae inter ſe ſimiles.

§. 13. Concipiatur igitur planum quodcunque per bina puncta homologa A et a, tranſiens, et dabitur aliud planum, per eadem puncta A et a tranſiens, in quo inſuper ipſum centrum ſimilitudinis Γ erit ſitum, ita vt interſectio futura ſit recta Aa. Ad hoc punctum inueſtigandum alia duo puncta homologa, veluti B et b, extra hoc planum ſita, quaeri debent, quae cum recta Aa in eodem plano ſint conſtituta, ſiue vt quatuor puncta A, a, B, b in idem planum incidant, quae inueſtigatio in genere inſtituenda haud exiguas ambages poſtularet. Tab. III. Fig. 6.

§. 14. Has autem ambages euitabimus, ſi punctum B ita accipiamus, vt in ipſam rectam Aa incidat, tum autem punctum homologum cadat in b, vnde ad planum tabulae demittatur perpendiculum $b\beta$, et ex β, ad rectam Aa productam normalis $\beta\mathfrak{b}$. Hoc enim modo quaterna puncta A, B et a, b certe in eodem plano erunt ſita, quandoquidem hoc planum tabulam interſecat ſecundum rectam Aa, ad eamque inclinatur ſub angulo $b\mathfrak{b}\beta$, quocirca in ipſo hoc plano neceſſario reperiri debebit centrum ſimilitudinis quaeſitum, Fig. 7.

ſitum, quippe quod iam ſine vlla difficultate ope methodi initio explicatae promtiſſime inueniri poterit.

§. 15. Problema quod hactenus tractauimus, ad ſcientiam Perſpectiuam referendum videtur, quandoquidem ſi effigies cuiuspiam obiecti accurate fuerit elaborata, plurimum intererit eum locum aſſignare, vnde ſi tam ipſum obiectum quam effigies aſpiciatur, omnes partes homologae ſub aequalibus angulis ſint appariturae. Iſte ſcilicet locus in eo puncto reperietur, quod centrum ſimilitudinis vocauimus.

§. 16. Iam ex iis, quae ſupra ſunt allata, iſtud centrum ſimilitudinis ſemper facile aſſignari poterit; quomodocunque tam obiectum quam effigies fuerint diſpoſitae. Statim enim conſiderentur duo puncta homologa A et a, quorum illud A in ipſo obiecto, hoc vero a in effigie ſit aſſumtum; tum ducta recta A a tanquam ad ipſum obiectum pertinens ſpectetur; in effigie autem ex puncto a ſimilis recta educatur $a\,\alpha$, quae ſcilicet ad effigiem pari modo referatur, quo recta A a ad ipſum obiectum refertur. Quo facto primo tenendum eſt, centrum ſimilitudinis quaeſitum ſemper reperiri in plano, quod his duabus rectis A a et $a\,\alpha$, ſiue tribus punctis A, a, α determinatur, eiusque locum ita definiri debere, vt ſimili modo ad vtramque rectam A a et $a\,\alpha$ referatur, cuius ergo inuentio ex ſequenti problemate erit petenda.

Tab. III. Fig. 8.

Problema geometricum.

Datis tribus punctis A, B, C, in plano tabulae vtcunque ſitis, inuenire in eodem plano punctum O, vt ductis rectis AB, BC, OC, OB et OA, ambo triangula OAB et OBC inter ſe fiant ſimilia; ſiue vt euadant anguli $AOB = BOC$; $OAB = OBC$ et $OBA = OCB$.

Tab. IV. Fig. 1.

So-

Solutio.

§. 17. Producta recta A B in D ponatur angulus C B D $= \theta$ qui ergo datur; tum vero vocetur angulus O A B $= \Phi$ qui adeo erit incognitus; quia autem ei aequalis esse debet angulus O B C, erit angulus O B D $= \Phi + \theta$, qui cum sit externus respectu trianguli A O B, erit angulus A O B $= \theta$, idemque datus, cui ergo etiam aequalis erit angulus B O C; ex qua conditione ipsum punctum O haud difficulter determinabitur.

§. 18. Cum igitur triangulum A O B ita sit comparatum, vt eius angulus A O B $= \theta$, ex elementis constat, super basi A B innumera eiusmodi triangula constitui posse, quorum anguli verticales A O B omnes eiusdem sint magnitudinis θ, siquidem omnes isti anguli in peripheria certi circuli, super basi A B descripti, reperiuntur. Huius igitur circuli centrum alicubi erit in recta M N, ex rectae A B puncto medio M perpendiculariter erecta; vnde si centrum fuerit in I, necesse est, vt angulus ad centrum A I B aequetur duplo anguli θ, ideoque erit eius semissis B I M $= \theta$, ideoque angulus M B I $= 90^0 - \theta$; ex quo manifestum est fore angulum C B I rectum, siue rectam B I ita esse ducendam, vt ad rectam C B fiat normalis, hocque modo innotescet centrum circuli quaesiti I; atque adeo, isto circulo descripto, centrum similitudinis quaesitum O alicubi in peripheria huius circuli erit situm.

§. 19. Simili modo si altera recta B C bisecetur in m, ad eamque statuatur normalis $m\,n$, super hac recta B C etiam describi poterit circulus, ad cuius peripheriam omnes anguli basi B C insistentes sint quoque $= \theta$, huiusque circuli centrum erit in puncto i, ita vt sit angulus B $i\,m = \theta$; vnde pa-

patet iſtam rectam B i eſſe ad B A normalem. Cum igitur, deſcripto centro i circulo per puncta C et B tranſeunte, in eius peripheria pariter ſitum ſit punctum quaeſitum O, euidens eſt iſtud punctum ſitum fore in interſectione amborum circulorum memoratorum.

§. 20. Haec autem multo faciliora reddi poſſunt hoc modo. Ad rectam B A ex A erigatur perpendiculum A E, rectae B I productae occurrens in E, eritque I E = B I = A I, ideoque punctum E in circulo, atque adeo recta B E erit diameter iſtius circuli. Simili modo ſi ex altera parte ex C ad B C erigatur perpendiculum C F, occurrens rectae B i productae in F, erit quoque i F = B i = C i, ideoque B F erit diameter huius alterius circuli. Quare ſi ſuper diametris B E et B F duo circuli conſtruantur, eorum interſectio O dabit centrum ſimilitudinis quaeſitum O.

Tab. IV. Fig. 2. §. 21. Conſtruamus nouam figuram, omiſſis lineis ſuperfluis, ac primo quidem ex punctis A et C ad rectas B A et B C erigamus perpendiculares A E et C F, quae rectis B E et B F, ipſis B C et B A normaliter iunctis, occurrant in punctis E et F; tum vero ſuper his rectis B E et B F tanquam diametris conſtructi intelligantur bini circuli, qui ſe mutuo in puncto O interſecent, eritque iſtud punctum O primo in ſemicirculo ſuper recta B E exſtructo, ideoque angulus B O E rectus; deinde vero idem punctum O quoque erit in ſemicirculo ſuper recta B F exſtructo, unde quoque angulus B O F erit pariter rectus; ex quo manifeſtum eſt ambas rectas E O et F O in directum eſſe ſitas. Quocirca ducta recta E F, in ea punctum O reperietur, ſi in eam ex puncto B demittatur perpendiculum B O; unde ſequens conſtructio facillima deriuatur.

Con-

Constructio problematis propositi.

§. 22. Ex tribus datis punctis A, B et C educantur rectae, quae ad binas rectas A B et B C sint normales, quarum intersectiones dabunt duo puncta E et F; tum vero in rectam E F ex B demittatur perpendiculum B O, eritque punctum O centrum similitudinis quaesitum, ita vt ductis rectis O A et O C, ambo triangula A O B et B O C inter se futura sint similia.

Demonstratio huius constructionis.

§. 23. Primo notandum est quadrilaterum A E O B esse circulo inscriptum, ex cuius natura sequitur fore angulos A B E = A O E, E A O = E B O, B A O = B E O, A E B = A O B. Deinde eodem modo quadrilaterum B O F C est circulo inscriptum, vnde sequentes angulorum aequalitates prodeunt: B O C = B F C, C B F = C O F, O B F = O C F, B C O = B F O.

§. 24. His notatis primo demonstrari poterit esse triangulum A O B simile triangulo E B F. Primo enim est angulus B A O = F E B (per § praeced.); deinde est angulus A O B = A E B, qui est complementum anguli A B E, sed anguli E B F complementum est idem angulus A B E, vnde sequitur fore angulum A O B = E B F; vnde sponte sequitur fore tertium angulum A B O = E F B.

§. 25. Eodem modo ostendi potest esse $\Delta BOC \backsim \Delta EBF$. Primo enim est angulus B C O = B F O; deinde est B O C = B F C, cui, ob B E ipsi C F parallelam, aequalis est alternus E B F, sicque erit angulus B O C = E B F, vnde etiam

etiam tertii anguli O B C et B E F erunt pariter aequales. Quare cum ambo triangula A O B et B O C ſimilia ſint eidem triangulo E B F, neceſſe eſt vt quoque ſint ſimiles inter ſe. Q. E. D.

§. 26. Notaſſe autem quoque iuuabit caſum, quo punctum O extra rectam E F cadit, veluti in figura 4. Hic
Tab. IV. Fig. 3. vt ante quadrilaterum A B O E eſt circulo inſcriptum; deinde vero euidens eſt quadrilaterum B F O C adeo in ſemicirculo, ſuper diametro B F deſcripto, ineſſe; vnde demonſtratio conſtructionis vt ante deriuari poterit, qua oſtendetur ambo triangula A O B et B O C ſimilia eſſe triangulo
Fig. 4. E B F, ideoque etiam ſimilia inter ſe. Praeterea quoque notari meretur caſus quo ambae rectae A B et B C ſunt inter ſe normales; tum enim manifeſtum eſt puncta E et F in ipſos terminos A et C incidere, vnde iuncta hypothenuſa E F ſiue A C, ſi in eam ex B demittatur perpendiculum B O, erit punctum O centrum ſimilitudinis quaeſitum, ſiquidem triangula A O B et B O C manifeſto ſunt ſimilia tam inter ſe quam tertio A B C.

§. 27. Denique etiam caſum, quo recta B C ad A B ſub angulo acuto inclinatur, conſiderari conuenit, quippe
Fig. 5. quo ambo perpendicula A E et B F in plagas contrarias cadunt, veluti in adiecta figura cernere licet, vbi punctum O intra angulum A B C ita cadet, vt triangula A O B et B O C inter ſe fiant ſimilia: ſemper enim quoque ſimilia erunt triangulo E B F.

§. 28. Interim tamen vnicus caſus occurrit, cui iſta ſolutio aduerſari videtur, qui contingit, quando recta A B cum B C in directum iacet; propterea quod ambo puncta

E

E et F in infinitum remoueantur, ita vt praecedens constructio hic plane adhiberi nequeat. Statim autem perspicuum est, hoc casu centrum similitudinis O necessario in rectam A B C productam incidere debere, ita vt fiat $AO:BO = BO:CO$. Ad hoc ergo punctum inueniendum vocemus $AB = a$, $BC = c$ et $BO = z$, oportet ergo esse $a+z:z = z:z-c$, vnde fit $z = \frac{ac}{a-c}$, ideoque $AO = \frac{aa}{a-c}$, qui valor sequenti modo commode construitur. In A rectae A B sub angulo quocunque iungatur recta $Ab = AB = a$, quae secetur in c ita, vt $bc = BC = c$, ductaque recta cB ei agatur parallela recta bO, cuius intersectio cum recta proposita A B ostendet punctum quaesitum O.

 PRO-